

Uma introdução às C^* -álgebras e aplicações

MAT 0148 - IME USP

Aluno: Ícaro de Oliveira Buscarini

Orientador: Severino Toscano do Rêgo Melo

2º Semestre de 2021

O fundamental:

Uma **álgebra** $\mathcal{A}$ é um espaço vetorial sobre $\mathbb{K}$ que possui uma operação $\cdot : \mathcal{A} \times \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$

$$(x, y) \mapsto x \cdot y$$

- O produto é associativo em relação a $\mathbb{K}$:
 $\forall x, y \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K} : \lambda(x \cdot y) = (\lambda x) \cdot y = x \cdot (\lambda y)$
- sendo $+$ a soma usual do espaço vetorial, temos que $\mathcal{A}$ com essas duas operações forma um anel.

Uma **norma** em $\mathcal{A}$ é uma função $\| \cdot \| : \mathcal{A} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ que satisfaz $\forall x, y \in \mathcal{A}, \forall \lambda \in \mathbb{K}$:

- $\|x\| = 0 \iff x = 0_{\mathcal{A}}$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

Dizemos que esta norma é **submultiplicativa** se satisfaz:

- $\|x \cdot y\| \leq \|x\| \cdot \|y\|$

Uma **sequência de Cauchy** em $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$, é uma sequência $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$, tal que:

- $\forall \varepsilon > 0 \exists n_0 \in \mathbb{N} : n, m \geq n_0 \Rightarrow \|a_n - a_m\| < \varepsilon$

Dadas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ álgebras, uma função $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{B}$ é dita **homomorfismo** (de álgebras) se for linear e quaisquer $a, b \in \mathcal{A}$ vale $\varphi(a \cdot b) = \varphi(a) \cdot \varphi(b)$.

- Se, φ for bijeção contínua com inversa contínua, dizemos que φ é **isomorfismo de álgebras** e que as respectivas álgebras são isomorfas.
- Se, além disso, as álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ forem normadas com as respectivas normas $\|\cdot\|_{\mathcal{A}}$ e $\|\cdot\|_{\mathcal{B}}$, φ for isomorfismo, e satisfazer: para qualquer $a \in \mathcal{A}$, $\|a\|_{\mathcal{A}} = \|\varphi(a)\|_{\mathcal{B}}$, então dizemos que φ é **isomorfismo isométrico**.

Álgebras de Banach

Uma **Álgebra de Banach** é uma álgebra normada $(\mathcal{A}, \|\cdot\|)$ em que toda sequência de Cauchy é convergente.

Exemplo 1.

Os quatérnios usuais

$\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk : a, b, c, d \in \mathbb{R}, i^2 = j^2 = k^2 = -1, i \neq j \neq k\}$, com a distributiva, regras usuais $ij = k, jk = i, ki = j$, anticomutativa e a norma usual $|a + bi + cj + dk| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$ é uma álgebra de Banach se sobre os reais, pois corresponde ao $\mathbb{R}^4$ com uma multiplicação pertinente. Mas sobre os complexos, note que $i(j \cdot k) = ii = -1 \neq 1 = j \cdot (-j) = j \cdot (ik)$, quebrando a propriedade associativa da multiplicação, não sendo portanto sequer uma álgebra (sobre $\mathbb{C}$).

Exemplo 2.

O conjunto $C_b(X) := \{f : X \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ é contínua e limitada}\}$ munido com a norma do supremo e as operações canônicas, onde X é um espaço topológico, é uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$.

Demonstração: Para mostrar que de fato é uma álgebra, é uma tarefa bem mais simples, portanto aqui vamos mostrar que é completa. Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ uma sequência de Cauchy em $C_b(X)$. Note que para qualquer $x \in X$, temos: $|f_n(x) - f_m(x)| \leq \|f_n - f_m\|$ e $(f_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ é sequência de Cauchy em $\mathbb{C}$ que é completo. Dessa forma, a sequência em $\mathbb{C}$ é convergente.

Agora, defina:

$$f : X \rightarrow \mathbb{C}, \text{ tal que: } f(x) = \lim_{n \in \mathbb{N}} f_n(x)$$

Note que f é limitada, pois:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n, m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon/4$$

Assim, para todo $x \in X$ teremos:

$$|f_{n_0}(x) - f(x)| = \lim_{m \in \mathbb{N}} |f_{n_0}(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/4$$

então,

$$|f(x)| \leq |f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \|f_{n_0}\| + \varepsilon/4$$

E portanto f é limitada.

Note que f é contínua, pois: dados $x \in X$, $\varepsilon > 0$, tome $n_0 \in \mathbb{N}$. Como f_{n_0} é contínua, existe um aberto $U \subset X$ que contém o elemento x , onde $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| < \varepsilon/3$ para todo $y \in U$. Note ainda que vale $|f_{n_0}(x) - f(x)| = \lim_{m \in \mathbb{N}} |f_{n_0}(x) - f_m(x)| \leq \varepsilon/3$. Portanto, se $y \in U$, temos:

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(y)| + |f_{n_0}(y) - f(y)| < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon$$

Logo f é continua em x e x é arbitrário. Portanto, f é continua.

Resta mostrar que a nossa sequência de Cauchy $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $C_b(X)$ converge para esta f .

Note que vale:

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N} ; n, m > n_0 \Rightarrow \|f_n - f_m\| < \varepsilon/4$$

. Por um argumento semelhante do que já fizemos anteriormente teremos $\|f_n - f\| \leq \varepsilon/4$ para todo $n > n_0$. Portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge de fato para f .



Uma álgebra de Banach, $\mathcal{A}$, é dita **com unidade** se existe $a \in \mathcal{A}$ de modo que $a \cdot x = x = x \cdot a$, $\forall x \in \mathcal{A}$. Denotamos tal elemento a por $1_{\mathcal{A}}$. Além disso, toda álgebra de Banach com unidade é também chamada de **álgebra de Banach unital**.

Dizemos que um elemento $x \in \mathcal{A}$ é inversível se existe $y \in \mathcal{A}$ de modo que $x \cdot y = y \cdot x = 1_{\mathcal{A}}$.

Lema

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach sobre $(\mathbb{R} \text{ ou } \mathbb{C})$ e seja $x \in \mathcal{A}$. Se $\|x\| < 1$ então $(1_{\mathcal{A}} - x)$ é inversível e $(1_{\mathcal{A}} - x)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$

Consideramos agora sempre $\mathcal{A}$ uma álgebra de banach unital sobre $\mathbb{C}$. Um resultado importante a se saber é que podemos considerar $\mathbb{C} \subset \mathcal{A}$.

Teorema

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra unital sobre $\mathbb{C}$ então podemos identificar $\mathbb{C}$ como uma álgebra contida em $\mathcal{A}$.

Demonstração: Vamos fazer um isomorfismo (de espaço vetorial e de anel) isométrico de $\mathbb{C}$ em um subconjunto de $\mathcal{A}$. Basta notar que $\varphi(\alpha) = 1_{\mathcal{A}}\alpha$, que leva $\mathbb{C}$ em $\mathcal{A}$ é injetora, sendo portanto bijetora no caso $\varphi : \mathbb{C} \rightarrow \text{Im}\varphi \subset \mathcal{A}$.

- φ é claramente linear pois:

$$\varphi(\lambda\alpha + \beta) = 1_{\mathcal{A}}(\lambda\alpha + \beta) = \lambda 1_{\mathcal{A}}\alpha + \beta = \lambda\varphi(\alpha) + \varphi(\beta).$$

- φ é contínua já que $\|\varphi(\alpha)\| = \|1_{\mathcal{A}}\alpha\| = |\alpha| \cdot \|1_{\mathcal{A}}\| = |\alpha|$, pois $\mathcal{A}$ é unital, a unidade tem norma 1. Isso conclui que φ é também isometria.
- $\varphi(\alpha\beta) = 1_{\mathcal{A}}(\alpha\beta) = (1_{\mathcal{A}} \cdot 1_{\mathcal{A}})(\alpha\beta) = 1_{\mathcal{A}} \cdot (\alpha 1_{\mathcal{A}}\beta) = (1_{\mathcal{A}}\alpha)(1_{\mathcal{A}}\beta) = \varphi(\alpha) \cdot \varphi(\beta)$, portanto φ também preserva a multiplicação, preservando a estrutura de anel.

- $\varphi^{-1} : \text{Img}\varphi \rightarrow \mathbb{C}$ é também contínua, dado que todo elemento da imagem de φ pode ser escrito como $1_{\mathcal{A}}\alpha$ para algum α complexo e $\varphi^{-1}(1_{\mathcal{A}}\alpha) = \alpha$ e isso conclui que $\|\varphi^{-1}(1_{\mathcal{A}}\alpha)\| = |\alpha|$, sendo também uma isometria.



Seja $a \in \mathcal{A}$, definimos o **espectro de** a , denotado por $\sigma(a)$ como:

$$\sigma(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ não é inversível}\}$$

E o **resolvente de** a , denotado por $\rho(a)$ é definido por

$$\rho(a) = \{\lambda \in \mathbb{C} : a - \lambda \text{ é inversível}\}$$

Em outras palavras, $\sigma(a) = \mathbb{C} \setminus \rho(a)$ e $\rho(a) = \mathbb{C} \setminus \sigma(a)$ sempre que $a \in \mathcal{A}$

um elemento muito útil que é usado para demonstrar o teorema de Gelfand para álgebras de Banach comutativas:

dado $a \in \mathcal{A}$, chamamos de **raio espectral** de a a seguinte igualdade:

$$r(a) = \sup_{\lambda \in \sigma(a)} |\lambda|$$

Um resultado bem importante relacionado ao espectro de um elemento qualquer de $\mathcal{A}$:

Teorema

Dado $a \in \mathcal{A}$, $\sigma(a)$ é compacto e não vazio.

Assim como temos o espectro de um elemento da álgebra, também podemos ter o espectro da própria álgebra.

Definimos o **espectro** de $\mathcal{A}$ como o conjunto

$$\sigma(\mathcal{A}) := \{\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C} ; \varphi \text{ é homomorfismo não nulo}\}$$

Lema

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach, todo homomorfismo $\varphi : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{C}$ é contínuo.

considere o dual topológico $\mathcal{A}^*$, Então se definirmos a função $p_a : \mathcal{A}^* \rightarrow \mathbb{C}$ por $p_a(\lambda) = |\lambda(a)|$ para todo $a \in \mathcal{A}$ é esta função é uma seminorma em $\mathcal{A}^*$. Teremos:

- A família de seminormas $\mathcal{F} = \{p_a ; a \in \mathcal{A}\}$ é separante. Isto é, para dado $\lambda \in \mathcal{A}^*$ não nulo existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $p_a(\lambda) \neq 0$.

Chamamos de **topologia fraca*** de $\mathcal{A}^*$ a topologia induzida pela família de seminormas $\mathcal{F}$ em $\mathcal{A}^*$.

Teorema

Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra de Banach, então $\sigma(\mathcal{A})$ é um espaço localmente compacto com a topologia fraca. se $\mathcal{A}$ é unital então $\sigma(\mathcal{A})$ é um espaço compacto.*

Também temos um importante resultado que relaciona espectro de elementos com o espectro da própria álgebra.

Teorema

Se $\mathcal{A}$ é comutativa, então para todo $a \in \mathcal{A}$ temos:

$$\sigma(a) = \{\varphi(a) ; \varphi \in \sigma(\mathcal{A})\}$$

Transformada de Gelfand

Seja $\mathcal{A}$ comutativa. Dado $a \in \mathcal{A}$, considere a função $\hat{a} : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C}$ tal que $\hat{a}(\varphi) = \varphi(a)$

Definimos a **transformada de Gelfand** como a função:

$$\kappa : \mathcal{A} \rightarrow C_0(\sigma(\mathcal{A})) \text{ definida por: } \kappa(a) = \hat{a}$$

Onde

$$C_0(\sigma(\mathcal{A})) = \{f : \sigma(\mathcal{A}) \rightarrow \mathbb{C} ; f \text{ é contínua e se anula no infinito}\}$$

Temos o seguinte lema que é importante para o teorema que vem a seguir.

Lema

Dado $a \in \mathcal{A}$, então a transformada de gelfand é uma transformação linear continua e: $\|\kappa(a)\| = r(a) \leq \|a\|$ e portanto κ é um homomorfismo contrativo.

Teorema de Gelfand - álgebras de Banach comutativas

O nosso resultado mais importante para álgebras de Banach:

Teorema

Seja $\mathcal{A}$ comutativa. Dado $a \in \mathcal{A}$ temos que a é inversível em $\mathcal{A}$ se e somente se $\hat{a}$ é inversível em $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$, isto é, se e somente se $\varphi(a)$ é não nulo para todo $\varphi \in \sigma(\mathcal{A})$.

Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de Banach sobre $\mathbb{C}$. Uma **involução** em $\mathcal{A}$ é uma função $*$: $\mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}$ satisfazendo, para todo $a, b \in \mathcal{A}$ e todo $\lambda \in \mathbb{C}$:

- $(a + b)^* = a^* + b^*$
- $(\lambda a)^* = \overline{\lambda} a^*$
- $(ab)^* = b^* a^*$
- $(a^*)^* = a$
- $\|a^*\| = \|a\|$

Uma **C^* -álgebra** é uma álgebra de Banach equipada com uma involução $*$ que satisfaz a seguinte propriedade:

$$\|a^*a\| = \|a\|^2 \text{ para todo } a \in \mathcal{A}$$

Exemplo.

Seja X um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto, então $C_0(X)$ é uma C^* -álgebra comutativa se munida com a involução dada pelo complexo conjugado. Esta álgebra também é unital se e somente se X é compacto.

Resultados em C^* -álgebras que são importantes para o teorema principal que é o teorema de Gelfand:

Lema

Se $\mathcal{A}$ é uma C^* -álgebra com unidade, então a transformada de Gelfand: $\kappa : \mathcal{A} \rightarrow C_0(\sigma(\mathcal{A}))$ é um homomorfismo de álgebras com involução, isto é: $\kappa(a^*) = \overline{\kappa(a)}$ para todo $a \in \mathcal{A}$.

Lema

Se $\mathcal{A}$ é uma C^* -álgebra unital comutativa, então sua transformada de Gelfand é uma isometria.

Lema

Se $\mathcal{A}$ é uma C^* -álgebra unital comutativa, então $\text{Im}(\kappa) = \{\kappa(a) ; a \in \mathcal{A}\}$ é densa em $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$

Teorema de Gelfand para C^* -álgebras

O nosso resultado mais importante para C^* -álgebras:

Teorema

Se $\mathcal{A}$ é uma C^ -álgebra unital comutativa, então sua transformada de Gelfand é um $*$ -isomorfismo isométrico entre as C^* -álgebras $\mathcal{A}$ e $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.*

Ou seja, temos que κ preserva involução, é isometria, tem imagem fechada e densa em $C_0(\sigma(\mathcal{A}))$.

Compactificação e aplicação

Seja X um espaço topológico Hausdorff e localmente compacto. Uma **compactificação** de X é um espaço Z compacto e Hausdorff que possui um subconjunto aberto e denso que é homeomorfo a X .

Como aplicação está sendo estudado que há uma forma de definir uma bijeção entre os conjuntos

$\{\mathcal{A} \text{ C}^* \text{- subálgebras de } C_b(X) ; \mathcal{A} \supseteq C_0(X)\}$ e $\{Z ; Z \text{ é compactificação de } X\}$. E isto se dá pelo fato que para todo $\mathcal{A} \in \{\mathcal{A} \text{ C}^* \text{- subálgebras de } C_b(X) ; \mathcal{A} \supseteq C_0(X)\}$ temos que $\sigma(\mathcal{A})$ é uma compactificação de X .

Obrigado!